page 4 19 1/3

Option Bio. Math 1e et 2e épreuve

E.N.I.T.R.A. TS Strasbourg

ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTREE 1992

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures

Ce sujet comporte 3 pages de texte.

N.B. : *Les réponses aux questions demandées devront être accompagnées d'un calcul ou d'un raisonnement. Un résultat non justifié ne sera pas pris en compte.*

Les variables aléatoires envisagées dans le problème (en abrégé v.a.) sont définies sur le même espace probabilisé, dont la probabilité est notée Pr.

I

On considère la suite (S_n) définie pour n entier, $n \geq 1$, par :

$$S_n = \ln\left(\frac{n!\, e^n}{n^n}\right)$$ ($\ln$: logarithme népérien de base e).

1. Etudier la monotonie et le signe de la fonction f définie pour $x > 1$ par :
$f(x) = 1 + (x-1)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

2. On pose, pour n entier, $n \geq 2$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

   a. En utilisant 1., montrer que : $u_n > 0$.

   b. Trouver un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

   c. Etudier la nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

   d. En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Soit λ un réel strictement positif fixé.
Dans cette partie II on appelle X une v.a. admettant comme fonction de densité la fonction f définie par :

$f(t) = ke^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$ (k constante réelle).
$f(t) = 0$ si $t < 0$.

1. Calculer k ainsi que l'espérance et la variance de X.

2. On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et par $X_1, \ldots, X_n$ n v.a. indépendantes suivant la même loi que X.

   a. Montrer que la v.a. $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ admet une fonction de densité f_n telle que :
   pour $t \geq 0$, $f_n(t) = \int_0^t f_{n-1}(x)\, f(t-x)\, dx$.
   (On pose $f_1 = f$).

   b. Démontrer que : $\forall\ t \geq 0$, $f_n(t) = k_n t^{n-1} e^{-\lambda t}$ (k_n constante réelle à calculer).

   c. Tracer le graphe de la fonction f_n. Calculer la borne supérieure, notée m_n, de f_n sur $[0, +\infty[$. En utilisant I, calculer la limite de m_n quand n tend vers $+\infty$.

3. On note, pour t réel positif : $\phi_n(t) = Pr\left(X_1 + \ldots + X_n < \frac{n}{\lambda} + t\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\right)$.

   a. Exprimer $\phi_n(t)$ au moyen d'une intégrale.

   b. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \phi_n'(t)$. On pourra utiliser, dans cette seule question, sans démonstration l'équivalent : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

   c. Citer le théorème du cours dont le résultat précédent est à rapprocher .

III

Soit p un nombre réel appartenant à $]0, 1[$. On dit que la v.a. X suit la loi G(p) si X est une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ et
$\forall\ k \in \mathbb{N}^*$ $Pr(X = k) = p^{k-1}(1-p)$.

1. Soient X et Y deux v.a. indépendantes suivant la même loi G(p).
Décomposer l'évènement $(X + Y = k)$ en évènements liés à X et Y et en déduire la loi de la v.a. $X + Y$.

2. Pour n entier, $n \geq 1$, soient $X_1, \ldots, X_n$ n v.a. indépendantes suivant chacune la loi $G(p)$.

a. Quelle est la fonction génératrice de la v.a. $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$?

b. Développer en série entière la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(1-t)^n}$.

c. Etablir que la loi de $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ est de la forme :

$\Pr(X_1 + X_2 + \ldots + X_n = k) = \alpha\, p^{k-n}(1-p)^n$ où α est un coefficient du binôme dépendant de n et k, à préciser.

3. Soit a un nombre réel strictement positif fixé.
Pour $\varepsilon \in]0, a[$, on note X_ε une v.a. suivant la loi $G\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{a}\right)$ et Y_ε la v.a. $Y_\varepsilon = \varepsilon X_\varepsilon$.

a. Quelle est l'espérance de Y_ε ?

b. Exprimer, pour $m \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\Pr(Y_\varepsilon < m\varepsilon)$ au moyen des seuls nombres ε, a et $t = m\varepsilon$.

c. Soit $t > 0$ fixé. Calculer la limite de $\Pr(Y_\varepsilon < m\varepsilon)$, quand ε tend vers 0^+ et m tend vers $+\infty$ de façon à ce que $m\varepsilon = t$. On note $F(t)$ cette limite.

d. Vérifier que la fonction F, convenablement prolongée sur $]-\infty, 0]$, est la fonction de répartition d'une v.a. X. Montrer que cette v.a. X admet une fonction de densité que l'on calculera. Quelle est l'espérance de X ?

---

page 420 2/3 1992.
E.N.I.T.R. & TS Strasbourg
Option Bio. Math.

ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTREE 1992

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures

N.B. : Ce sujet comporte 3 pages de texte.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On désigne par $E(I)$ l'ensemble des fonctions f de classe C^∞ sur I telles que pour tout x de I et tout entier n naturel on ait $f^{(n)}(x) \geq 0$; $f^{(0)} = f$ par convention, $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f.

I

a. Soient, $f(x) = \exp(x)$, $g(x) = -\dfrac{1}{x}$, $h(x) = -\ln(-x)$, et $m(x) = \tan x$.
Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions f, g, h.
Démontrer que la dérivée n-ième de m peut s'écrire $m^{(n)}(x) = P(\tan x)$ où P est un polynôme à coefficients positifs ou nuls.
Démontrer que l'on définit ainsi quatre fonctions telles que :
$f \in E(\mathbb{R})$; $g \in E(]-\infty, 0[)$; $h \in E([-1, 0[)$, $m \in E([0, \frac{\pi}{2}[)$.

b. Déterminer tous les α réels tels que la fonction $x \longrightarrow (1-x)^\alpha$ appartienne à $E(]-1, 1[)$.

c. Soit pour $0 \leq x < 1$ la fonction $f(x) = (\operatorname{Arcsin} x)^2$.
Exprimer $f''(x)$ en fonction de f' et x.
Vérifier par récurrence que pour tout k entier naturel non nul on a
$(1-x^2)f^{(k+2)}(x) = [(2k+1)x]f^{(k+1)}(x) + k^2 f^{(k)}(x)$.
En déduire que $f \in E([0, 1[)$.
Calculer les valeurs en 0 des dérivées successives de cette fonction f.

d. Si φ est une fonction de $E(I)$ que dire du sens de variation sur I de φ et $\varphi^{(n)}$?

page 421 3/3
E.N.I.T.R & TS Strasbourg Option : Bio. Math.

II

On suppose que $I =]a,b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$, et soit f une fonction de $E(I)$.

1. a. Démontrer que f est prolongeable en a, par continuité, en une fonction, que l'on notera $\overline{f}$, continue sur $[a,b[$.

   b. Est-il possible de prolonger de même f en la borne b ?

2. Démontrer de même que $f^{(n)}$ admet un prolongement continu, que l'on notera $\overline{f^{(n)}}$, sur l'intervalle $[a,b[$.

3. Etudier $\dfrac{f(a+h)-\overline{f}(a)}{h}$ et démontrer que $\overline{f}$ est dérivable en a à droite.

4. a. Vérifier que pour tout $n \geq 0$ $\overline{f}^{(n)} = \overline{f^{(n)}}$.

   b. en déduire que $\overline{f} \in E([a,b[)$.

III

On suppose dans cette partie $I = [a,b[$, $-\infty < a < b < +\infty$.
Soient f une fonction de $E(I)$ et x un réel donné tel que $a < x < b$.

1. On rappelle que, pour tout entier $n \geq 0$, on a la formule de Taylor :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$$

   Donner une démonstration de cette formule.

2. On pose $\varphi_n(u) = \dfrac{1}{(u-a)^n}\displaystyle\int_a^u \frac{(u-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$ pour $n \geq 0$ et $a < u < b$.

   Vérifier l'égalité : $\varphi_n(u) = \dfrac{(u-a)}{n!}\displaystyle\int_0^1 s^n f^{(n+1)}[(1-s)u + sa]\,ds$.

   a. Démontrer ensuite que la fonction φ_n est croissante sur $]a,b[$.

   b. En déduire que si $a < x < y < b$ on a alors l'inégalité

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt \leq \left(\frac{x-a}{y-a}\right)^n f(y).$$

3. a. En déduire que f est développable en série de Taylor en a à droite.

   b. Démontrer que la fonction $x \longrightarrow \tan(x)$ est développable en série entière en 0 sur tout l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

   c. Démontrer que la fonction $x \longrightarrow (\text{Arcsin } x)^2$ est développable en série entière en 0 sur $]-1,1[$; expliciter ce développement. (Cf. I.c)

4. Démontrer enfin que si f s'annule en $x \in]a,b[$, alors f est nulle sur I.

IV

On suppose dans cette partie que $I =]-\infty,0[$ et que $f \in E(I)$.

1. Démontrer que $f(x)$ admet une limite ℓ réelle quand x tend vers $-\infty$.

2. Vérifier que pour tout $x < 0$ on a

$$f'(x) \overset{?}{\leq} \frac{2}{|x|}\,|f(x/2)-f(x)| \leq \frac{2}{|x|}\,f(x/2) \qquad (1)$$

3. a. En déduire que $\forall\, n \geq 1$, $x < 0$, on a

$$f^{(n)}(x) \leq \frac{k_n}{|x|^n}\,|f(x/2^n)-f(x/2^{n-1})| \leq \frac{k_n}{|x|^n}\,f(x/2^n)$$

   où k_n est un entier naturel que l'on calculera.
   On pourra raisonner par récurrence.

   b. Déduire des questions précédentes que pour k entier fixé, $k \geq 1$, on a $x^k f^{(k)}(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (*On pourra majorer $f^{(k)}(x)$ avec l'aide de l'inégalité (1) appliquée à $f^{(k-1)}$ puis à $f^{(k-2)}$ et ainsi de suite...*).

4. Démontrer enfin que si $a < x < 0$ le reste intégral $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$ tend vers $f(x)-\ell$ quand a tend vers $-\infty$, x et n fixés.
